Projet Scientifique

Les Cyclones Tropicaux

Matthieu ATTALI   Xavier CHASSAGNEUX
Lucien DÉGARDIN   Rodolphe GOURSEAU
Xavier MISSERI   Pierre-Louis NAUD   Ngoc Anh VU

14 mai 2003

Table des matières

Chapitre 1

Simulation numérique

1.1 Modèle "shallow-water"

On considère une mince couche de fluide de profondeur H, incompressible ($\rho = 1$), et non dissipatif. Le fluide est en rotation. Le paramètre de Coriolis f varie linéairement avec y selon la loi : $f = f_0 + \beta\, y$ (plan β). L'échelle horizontale des mouvements auxquels on s'intéresse est grande devant l'échelle verticale. On supposera donc que le fluide est toujours en équilibre hydrostatique, et que le mouvement est barotrope (u et v ne dépendent pas de z). La pression atmosphérique au-dessus du fluide est négligeable [1].

Sous ces hypothèses, on a :

$$P = g\,\big(h(x,y,t) - z\big) \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}(\underline{U}) = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\mathrm{D}\underline{U}}{\mathrm{D}t} = \underline{F} - \underline{\mathrm{grad}}(P) \tag{1.3}$$

Les conditions aux limites [a] en $z = 0$ et en $z = h(x,y,t)$ sont :

$$w(z=0) = 0 \tag{1.4}$$

$$w\big(z = h(x,y,t)\big) = \frac{\partial h}{\partial t} + u\,\frac{\partial h}{\partial x} + v\,\frac{\partial h}{\partial y} \tag{1.5}$$

[a] imperméabilité en $z = 0$ et surface matérielle en $z = h(x,y,t)$

En projetant l'équation d'Euler (1.3) sur $\underline{e}_x$ et sur $\underline{e}_y$, et en utilisant la pression hydrostatique (1.1), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f\,v + g\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f\,u + g\,\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \tag{1.7}$$

En utilisant l'équation (1.2), et en intégrant par rapport à z, comme u et v ne dépendent pas de z, on a [b] :

$$w = -\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\Big)\,z \tag{1.8}$$

La condition en $z = h$ donne alors :

$$\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t} + h\,\nabla u = \frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.9}$$

En utilisant le fait que $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial h}{\partial x}\Big) = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial h}{\partial y}\Big)$, en dérivant les équations (1.6) et (1.7) *respectivement* par rapport à y et x, et en notant $\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{D}(\zeta + f)}{\mathrm{D}t} = -(\zeta + f)\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\Big) \tag{1.10}$$

Grâce aux équations (1.9) et (1.10), on déduit :

[b] la condition en $z = 0$ détermine la fonction de x et de y qui apparaît lors de l'intégration

$$\frac{1}{\zeta+f}\,\frac{\mathrm{D}(\zeta+f)}{\mathrm{D}t}-\frac{1}{h}\,\frac{\mathrm{D}(h)}{\mathrm{D}t}=0=\frac{\mathrm{D}\Big(\ln\big(\frac{\zeta+f}{h}\big)\Big)}{\mathrm{D}t} \tag{1.11}$$

Donc, $q=\dfrac{\zeta+f}{h}$ est conservée pour chaque colonne de fluide.

On cherche les oscillations du système autour de l'état de repos. Donc on peut écrire $h(x,y,t)=H+\eta(x,y,t)$, avec $\eta \ll H$, et on peut supposer que les vitesses u et v sont petites. On peut alors linéariser les équations (1.6), (1.7), et (1.9). On obtient [c] donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t}-f\,v+g\,\frac{\partial \eta}{\partial x}=0 \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+f\,u+g\,\frac{\partial \eta}{\partial y}=0 \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+H\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\Big)=0 \tag{1.14}$$

En faisant $\dfrac{\partial(1.13)}{\partial t}-\dfrac{\partial(1.12)}{\partial t}$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{f}{H}\frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{1.15}$$

Soit en intégrant [d] :

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{f}{H}\eta \tag{1.16}$$

[c] f est supposé constant

[d] la constante d'intégration est nulle car pas de variation de vitesses si pas de déformation

Puis, en faisant $\dfrac{\partial(1.12)}{\partial t}+\dfrac{\partial(1.13)}{\partial t}$, et en utilisant (1.16), on déduit l'équation d'évolution de η :

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+f^2\eta=gH\Big(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\Big) \tag{1.17}$$

Si on recherche η sous la forme $\eta=a\,e^{i(\overrightarrow{k}\,.\,\overrightarrow{x}-\omega t)}$, on trouve la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2=f^2+g\,H\,k^2 \tag{1.18}$$

D'où la vitesse de phase :

$$v_\phi=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{f^2}{k^2}+g\,H} \tag{1.19}$$

et d'où la vitesse de groupe :

$$v_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{g\,H}{\sqrt{\frac{f^2}{k^2}+g\,H}} \tag{1.20}$$

et on a : $v_g v_\phi=g\,H$ et $v_g\neq v_\phi$. L'onde est donc dispersive.

Pour les petites longueurs d'ondes, on a :

$$v_\phi\simeq\frac{f}{k} \tag{1.21}$$

$$v_g\simeq\frac{g\,H\,k}{f} \tag{1.22}$$

et l'onde est dispersive.

Pour les grandes longueurs d'ondes, on a :

$$v_\phi\simeq\sqrt{g\,H} \tag{1.23}$$

$$v_g\simeq\sqrt{g\,H} \tag{1.24}$$

et l'onde est non dispersive.

En utilisant (1.12) et (1.13), on obtient [e] :

$$u \simeq -\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{1.25}$$

$$v \simeq \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{1.26}$$

Ainsi, l'équation (1.10), grâce aux équations (1.25) et (1.26), en supposant $\zeta \ll f$ et $f \simeq f_0$, et en posant $c^2 = g\,H$, devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - \frac{f_0^2}{c^2}\eta\Big) + \beta\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{1.27}$$

Avec une solution sous forme d'onde plane monochromatique $\eta = a\,e^{i(kx+ly-\omega t)}$, la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = -\frac{\beta\,k}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{c^2}} \tag{1.28}$$

La vitesse de phase correspondante est :

$$v_\phi = -\frac{\beta\,k}{(k^2+l^2)^{(3/2)} + \frac{f_0^2}{c^2}\sqrt{k^2+l^2}} \tag{1.29}$$

où la direction $\underline{e}_x$ semble particulière ($v_\phi \propto k$).

[e] en négligeant le terme de double dérivée temporelle

1.2 Paramètres de la simulation

Pour la simulation [2], on utilise des paramètres réglables dont les valeurs sont fixés par les ordres de grandeurs caractéristiques d'un cyclone, à savoir :

- la vitesse de l'écoulement $U \sim 20\, m.s^{-1}$
- le diamètre du cyclone $L \sim 10^6\, m$
- la hauteur du cyclone $H \sim 10^4\, m$
- la vitesse de rotation de la Terre $\Omega \sim 7.3\ 10^{-5}\, s^{-1}$
- le rayon de la Terre $R_T \sim 6.4\ 10^6\, km$.

Les paramètres que l'on doit donner au programme sont :

- le nombre de Rossby $\varepsilon = \dfrac{U}{2\,\Omega\, L}$
- le nombre de Burger $S = \left(\dfrac{R_d}{L}\right)^2$, où $R_d = \dfrac{\sqrt{g\, H}}{f_0}$
- $\varepsilon_\beta = \beta\, \dfrac{R_d}{f_0}$

Bibliographie

[1] J.Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, 1982

[2] J. Le Sommer, *Programme réalisé sous Fortran*, 2002

Index