

# PROJET SCIENTIFIQUE

## LES CYCLONES TROPICAUX

Matthieu ATTALI      Xavier CHASSAGNEUX  
Lucien DÉGARDIN      Rodolphe GOURSEAU  
Xavier MISSERI      Pierre-Louis NAUD      Ngoc Anh VU

*31 mars 2003*



## 1. Dynamique bi-dimensionnelle

Pour comprendre certains comportements dynamiques des tourbillons atmosphériques, on utilise, en première approximation, un modèle simple appelé 2D-barotrope qui repose sur les approximations suivantes :

- on considère un fluide *inviscide* et *incompressible*,
- l'écoulement est *bi-dimensionnel*.

En effet, en prenant comme grandeurs caractéristiques<sup>1</sup>  $L = 10^6 \text{ m}$ ,  $U = 50 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\nu = 10 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ , obtient un nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e \simeq 5.10^{12} \gg 1$  et un nombre de Mach  $\mathcal{M}_c \simeq 10^{-1} \ll 1$ , valeurs qui justifient respectivement les hypothèses du fluide inviscide et incompressible.

La hauteur caractéristique est  $h = 10^4 \text{ m}$  et la longueur horizontale est  $L = 10^6 \text{ m}$  si bien que l'écoulement peut être considéré comme bi-dimensionnel dans le plan horizontal.

L'équation d'Euler à deux dimensions s'écrit alors :

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{\text{grad}}(\underline{U}).\underline{U} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{\text{rot}}(\underline{U}) \wedge \underline{U} + \underline{\text{grad}}\left(\frac{U^2}{2}\right) = -\frac{\underline{\text{grad}}(p)}{\rho}$$

En passant cette équation au rotationnel, en utilisant l'incompressibilité du fluide<sup>2</sup>, la définition<sup>3</sup> de  $\underline{\omega}$  et en utilisant les formules sur les opérateurs vectoriels, on obtient :

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{\text{grad}}(\underline{\omega}).\underline{U} = \underline{\text{grad}}(\underline{U}).\underline{\omega}$$

Mais,  $\underline{U}$  est dans le plan horizontal, et  $\underline{\omega}$  est selon  $\underline{e}_z$ , donc :  $\underline{\text{grad}}(\underline{U}).\underline{\omega} = 0$  et on a alors :

$$\boxed{\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = 0} \quad (1.1)$$

Il y a donc conservation de la vortacité  $\underline{\omega} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\underline{e}_z$

L'écoulement étant incompressible, on a :  $\text{div}(\underline{U}) = 0$ . Donc :  $\exists \underline{\Psi}$  champ vectoriel tel que :  $\underline{U} = \underline{\text{rot}}(\underline{\Psi})$ . De plus, l'écoulement étant bi-dimensionnel, on a :  $\underline{\Psi} = \Psi(x, y)\underline{e}_z$ . Ainsi on a :

<sup>1</sup> grandeurs caractéristiques pour des tourbillons atmosphériques tels des cyclones, des dépressions, et des anticyclones

<sup>2</sup>  $\text{div}(\underline{U}) = 0$  et  $\rho = \text{cte}$

<sup>3</sup>  $\underline{\omega} = \underline{\text{rot}}(\underline{U}) = \omega \underline{e}_z$  car écoulement bi-dimensionnel

$$\begin{cases} v_x = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} \\ v_y = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.2)$$

On a alors :  $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}(\Psi) = v_x \frac{\partial\Psi}{\partial x} + v_y \frac{\partial\Psi}{\partial y} = v_x v_y - v_y v_x = 0$ .

Ainsi :  $\psi = cte \Rightarrow d\Psi = 0 \Rightarrow \underline{\text{grad}}(\Psi) \cdot d\mathbf{l} = 0 = \underline{\text{grad}}(\Psi) \cdot \underline{U} \Rightarrow d\mathbf{l} \parallel \underline{U}$ .

Donc les équi- $\Psi$  correspondent aux lignes de courant. L'écoulement étant stationnaire, ce sont aussi les trajectoires.

Considérons un vortex ponctuel ( $\underline{\omega} = 0$  sauf en  $r = 0$ ) de circulation  $\Gamma_0$ . On a par conséquent<sup>4</sup> :

$$\oint_{\mathcal{C}(O,r)} \underline{U} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma_0$$

Or, par invariance par rotation<sup>5</sup> et par incompressibilité<sup>6</sup> de l'écoulement,  $\underline{U} = U(r) \underline{e}_\theta$  et donc :

$$\Gamma_0 = 2\pi r U \Rightarrow U = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}$$

D'où, à une constante près :

$$\boxed{\Psi(r, \theta) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln(r)} \quad (1.3)$$

Un tel tourbillon est stationnaire et il est emporté par l'écoulement. Dans un écoulement à vitesse  $U$ , le tourbillon décrit une droite de même sens et de même direction<sup>7</sup> que  $\underline{U}$ , à la vitesse  $\underline{U}$ . Dans le cas d'une paire de vortex, le vortex  $\Gamma_0$  induit une vitesse  $\frac{\Gamma_0}{2\pi d}$  sur le vortex  $-\Gamma_0$ , et le vortex  $-\Gamma_0$  induit une vitesse  $\frac{\Gamma_0}{2\pi d}$  sur le vortex  $\Gamma_0$  (FIG. ??, page ??). Ainsi les deux tourbillons restent à la distance  $d$  et se déplacent à la vitesse  $\frac{\Gamma_0}{2\pi d}$  vers le haut.

## 2. Dynamique bi-dimensionnelle sur le globe

Afin de reproduire de certains effets dynamiques, il est nécessaire de prendre en compte la rotation de la Terre et la géométrie sphérique de celle-

<sup>4</sup> où  $\mathcal{C}(O, r)$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r > 0$

<sup>5</sup>  $\underline{U} = \underline{U}(r)$

<sup>6</sup>  $\text{div}(\underline{U}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow U_r = \frac{A}{r} \underset{r \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \underline{U} = U(\theta) \underline{e}_\theta$

<sup>7</sup> théorème de Helmholtz

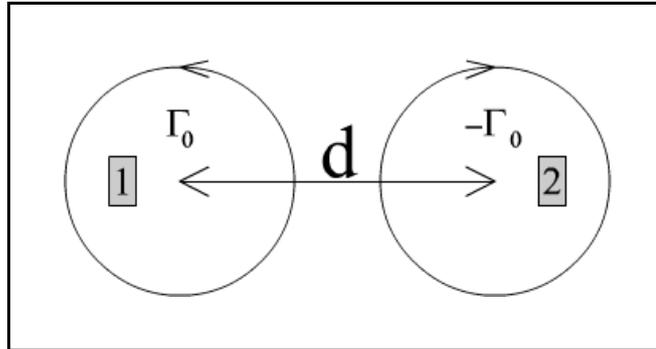
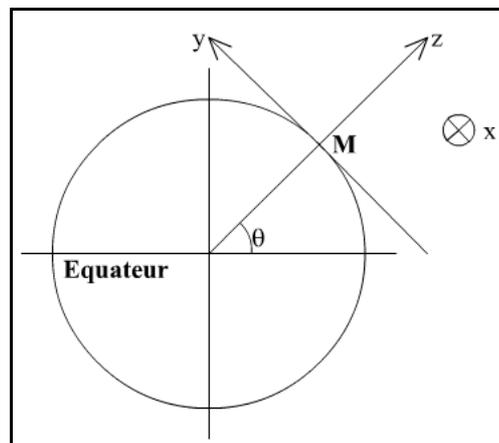
FIG. 1 – Paire de vortex ponctuels de signe opposé  $(\Gamma_0, -\Gamma_0)$ .

FIG. 2 – Repère local utilisé dans la dynamique bi-dimensionnelle.

ci. On se place alors dans un repère localement cartésien en un point M de la surface du globe (FIG. ??, page ??).

Dans le référentiel galiléen géocentrique, il faut ajouter, à la vitesse relative de l'écoulement, la vitesse due à la rotation de la terre. Donc le rotationnel de la vitesse dans le référentiel est la somme de  $\underline{\omega}$  et du rotationnel de la vitesse due à la rotation de la Terre, dont la projection sur l'axe vertical local<sup>8</sup> est deux fois le vecteur rotation<sup>9</sup>. Cette projection vaut donc  $2\Omega_0 \sin(\theta)$ . Ainsi on obtient :

$$\boxed{\frac{D(\omega + f)}{Dt} = 0} \quad (2.1)$$

$$\boxed{f = 2\Omega_0 \sin(\theta)} \quad (2.2)$$

Cependant, en coordonnées cartésiennes, les variations de  $f$  s'écrivent au premier ordre :

$$\boxed{f \simeq 2\Omega_0 \sin(\theta) + \frac{2\Omega_0 \cos(\theta)}{R} y = f_0 + \beta y} \quad (2.3)$$

L'approximation plan-beta est valide pour  $\frac{y}{R}$  infinitésimal<sup>10</sup>.  $\beta$  est maximal quand  $\theta = 0$  c'est-à-dire à l'équateur.

Si on reprend l'équation (2.1), on obtient<sup>11</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

En notant  $J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$ , on a :

$$\boxed{\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + J(\Psi, \Delta \Psi) + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0} \quad (2.4)$$

<sup>8</sup> on ne s'intéresse pas aux autres composantes ici puisque l'écoulement est supposé bi-dimensionnel

<sup>9</sup> la vorticité dans une rotation solide vaut deux fois le vecteur rotation

<sup>10</sup> donc pour des valeurs de  $y$  inférieures   500 km

<sup>11</sup> en utilisant le fait que :  $\exists \Psi; \underline{U} = \underline{\text{rot}}(\Psi \underline{e}_z) \Rightarrow \underline{\omega} = \underline{\text{rot}}(\underline{\text{rot}}(\Psi)) = \underline{\text{grad}}(\text{div}(\Psi)) - \Delta \Psi$  et  $\text{div}(\Psi) = 0$

On considère alors un tourbillon axisymétrique<sup>12</sup>  $\Psi(x, y) = \Psi_0(r)$ . On a :  $J(\Psi_0, \Delta\Psi_0) = 0$ . En régime stationnaire, grâce à (2.3), on obtient :

$$\beta \cos(\theta) \frac{\partial\Psi_0}{\partial r} = 0$$

D'où, comme on ne veut pas une solution triviale et que  $\beta \neq 0$  :

$$\boxed{\theta = \pm \frac{\pi}{2}} \quad (2.5)$$

Un tourbillon axisymétrique stationnaire ne peut exister qu'aux pôles.

Un tourbillon aux latitudes tropicales peut, entraîné par la circulation atmosphérique à grande échelle, se déplacer en latitudes.

L'équation (2.1) donne  $\omega + f = cte$ . Or, quand le cyclone se déplace,  $f$  augmente et donc nécessairement  $\omega$  diminue. Ainsi, il existe une latitude où  $\omega$  s'annule et le cyclone disparaît alors.

### 3. Trajectoire du cyclone

Pour calculer l'évolution initiale d'un tourbillon axisymétrique  $\Psi_0(r)$ , on utilise un développement de Taylor de la fonction de courant :

$$\Psi(x, y, t) = \Psi_0(r) + \frac{t}{\tau_0} \Psi_1(x, y) + \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2 \Psi_2(x, y) + \dots$$

avec  $\tau_0 = \frac{1}{\beta r_0}$ ,  $r_0$  étant une taille caractéristique du tourbillon.

En utilisant l'équation (2.3), on obtient :

$$\frac{\partial(\Delta\Psi)}{\partial t} = \frac{\Delta\Psi_1}{\tau_0} \text{ en se plaçant à } t = 0$$

$$J(\Psi, \Delta\Psi) = J(\Psi_0, \Delta\Psi_0) = 0 \text{ (à } t = 0)$$

$$\text{De plus, à } t = 0 \quad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \cos(\theta) \frac{\partial\Psi_0}{\partial r}$$

Et donc :

$$\boxed{\frac{\Delta\Psi_1}{\tau_0} + \beta \cos(\theta) \frac{\partial\Psi_0}{\partial r} = 0} \quad (3.1)$$

<sup>12</sup> tourbillon à symétrie cylindrique qui en première approximation rend compte de l'écoulement d'un cyclone

En choisissant un tourbillon initial défini par :

$$\Psi_0(r) = \begin{cases} \frac{1}{4}\omega_0(r^2 - r_0^2) & \text{si } r \leq r_0 \\ \frac{1}{6}\omega_0 r_0^2 \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right) & \text{si } r \geq r_0 \end{cases}$$

on obtient, en résolvant l'équation (3.1)<sup>13</sup> :

$$\Psi_1(r) = \begin{cases} \cos(\theta) \left( \frac{\omega_0 r_0 r}{6} + \frac{\omega_0 r^3}{16r_0} \right) & \text{si } r \leq r_0 \\ -\cos(\theta) \left( \frac{\omega_0 r_0^4}{3r^2} + \frac{\omega_0 r_0^3}{12r} \right) & \text{si } r \geq r_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Donc au centre du tourbillon, la vitesse induite par  $\Psi_1$  est :

$$\begin{cases} v_x(r=0) = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y}(r=0) = 0 \\ v_y(r=0) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}(r=0) = \frac{\omega_0 r_0}{6} \end{cases}$$

soit

$$\boxed{\underline{v}(r=0) = \frac{\omega_0 r_0}{6} \underline{e}_y} \quad (3.3)$$

Ainsi, le cyclone va se déplacer selon  $\underline{e}_y$ , c'est-à-dire vers le nord dans l'hémisphère nord et vers le sud dans l'hémisphère sud ( $\beta < 0$  dans l'hémisphère sud).

Plus précisément, en raisonnant dans l'hémisphère nord,  $\Psi_1$  est un dipôle et  $\Psi_0$  fait tourner ce dipôle. Dons juste après sa formation, le cyclone va se diriger vers le nord avec une courbure vers l'ouest due à la force de Coriolis. Mais le temps  $t$  augmentant, la contribution amenée par  $\psi_1$  va devenir prépondérante si bien que le cyclone va dévier vers l'est<sup>14</sup> jusqu'à ce que le cyclone disparaisse.

L' exemple du cyclone Floyd (FIG. ??, page ??) montre bien le déplacement bien vers le nord pour l'hémisphère nord.

Le modèle est "très loin" de prédire la trajectoire réelle d'un cyclone car il utilise le plan tangent pour le déplacement. Ceci n'est valable qu'au premier ordre. Le modèle ne tient en plus pas compte ni des vents ni du relief qui sont des éléments non négligeables dans la trajectoire des cyclones.

<sup>13</sup> les constantes sont fixées par continuité du champ et de sa dérivée car  $\underline{U}$  est continue

<sup>14</sup> le pôle le plus au nord du dipôle est plus intense que le pôle le plus au sud

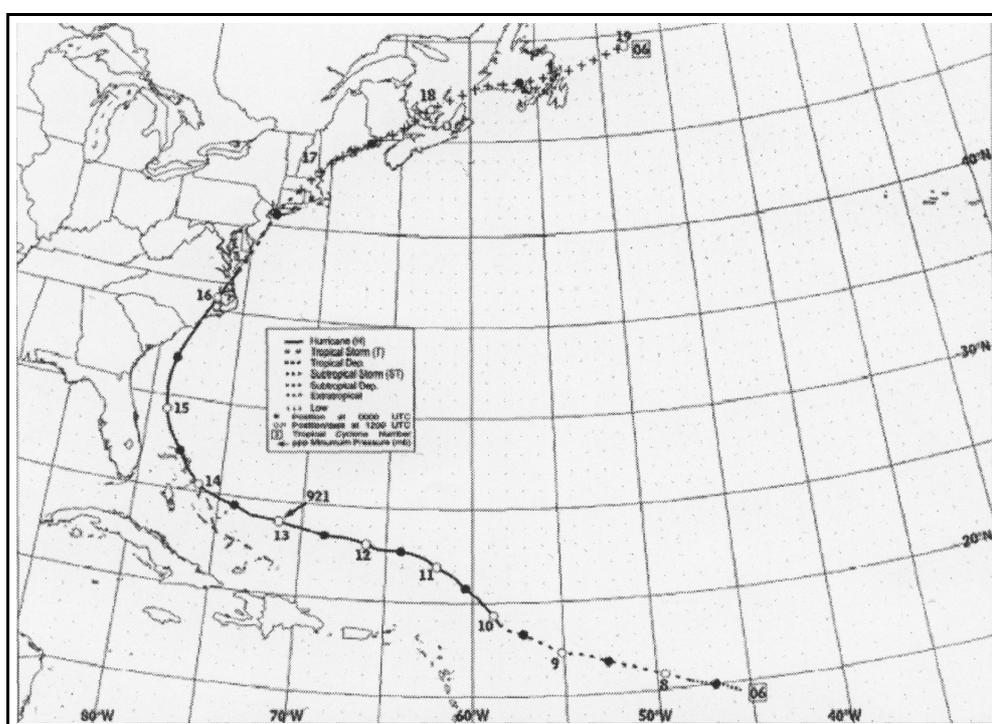


FIG. 3 – Best track positions for Hurricane Floyd, 07-17 September 1999.